学校编号： 10384 分类号：______ 密级：______

学 号： 200323023 UDC:______

厦 门 大 学

硕 士 学 位 论 文

无界区域中守恒律方程的谱元粘性消去法

Spectral Element Vanishing Viscosity for Conservation Laws on the Semi-infinite Interval

江 良

指导教师姓名： 许传炬 教授

专 业 名 称： 计 算 数 学

论文提交日期： 2006 年 5 月

论文答辩日期： 2006 年 月

学位授予日期： 2006 年 月

答辩委员会主席：______

评 阅 人：______

2006 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果．本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明．本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任．

责任人（签名）:

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（　），在　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（）

(请在以上相应括号内打“√”)

作者签名：　　　　　　　日期：　　　年　月　日

导师签名：　　　　　　　日期：　　　年　月　日

摘　要

稳定性问题是谱方法在守恒律方程等双曲线型问题中面临的一个主要问题．首先，由于双曲线型问题本身缺乏物理耗散，即使很小的误差也引起数值解的不稳定；其次，当解出现间断，在物理解断点周围容易产生 Gibbs 现象，这种 Gibbs 震荡的非线性作用将最终导致数值解的不稳定．本文旨在考虑一种谱元粘性消去法来求解无界区域的守恒律方程．首先，简单回顾谱粘性消去法的发展历程及其在计算流体力学领域中的应用，并讨论无界区域上的计算问题，特别是讨论区域变换方法．在这基础上研究无界区域上守恒律方程的 SVV 方法谱逼近问题．其次，把区域剖分成若干无重叠子区域，研究基于分片多项式空间的各种逼近算子及其误差估计．然后把基于 SVV 算子的定义推广到多区域的计算中，进而构造出了守恒律方程的变分问题及其谱元粘性逼近．在收敛性分析方面，在数值解一致有界性假设条件下，证明了谱元粘性消去法所得数值解强收敛到唯一熵解．最后，通过对线性对流方程和 Bürgers 方程的实际计算验证了谱元粘性消去法的有效性．

关键词：无界区域守恒律方程；谱元粘性消去法；收敛分析

Abstract

The stability problem is one of the main issues in the spectral approximations of the hyperbolic problems such as the conservation laws. Firstly, due to the absence of the the physical dissipation in the hyperbolic problems, even minor errors or under resolution can cause the computation to become unstable. Secondly, the non-linearity is prone to develop discontinuous solutions in finite time. In the neighbor of the discontinuity, the numerical solution exhibits a visible oscillation. This oscillation is due to the well known Gibbs phenomenon, which is inevitable in any spectral approximation of discontinuous functions. In this paper we propose a spectral element vanishing viscosity (SEVV) method for the conservation laws in the semi-infinite interval. By using a suitable mapping, the problem is first transformed into a modified conservation law on a bounded interval, then the well-known spectral vanishing viscosity technique is generalized to the multi-domain case in order to approximate this transformed equation more efficiently. The construction details and convergence analysis are presented. Under an usual assumption of boundedness of the approximation solution, it is proven that the solution of the SEVV approximation converges to the unique entropy solution of the conservation laws. A series of numerical tests is carried out to confirm the theoretical results.

Key words: conservation laws in unbounded domain, spectral element vanishing viscosity, convergence analysis.

目　录

Contents

第一节 引言

谱方法是一种求解偏微分方程的高阶数值方法. 它是以正交多项式 (如三角多项式、 Chebyshev 多项式、 Legendre 多项式等) 作为基函数进行高精度的函数逼近. 根据不同的构造方法，谱方法可以分为 Galerkin 谱方法、配点法和基于弱形式的拟谱方法 (即基于 Gauss 型数值积分的广义 Galerkin 谱方法). 相对一些经典的方法 (如：有限元法、有限差分法)，它是一种新的方法. 特别是上个世纪 70 年代初快速 Fourier 变换 (FFT) [1] 和张量基快速求和方法 [2] 的引入促进了谱方法的快速发展. 近年来，谱方法已经非常成功地应用于求解各种偏微分方程，特别是应用于不可压流体的数值模拟中 (参考 [3, 4]).

谱方法的最大特点是它具有所谓 "无穷阶" 收敛性，即如果原方程的解无穷光滑，那么用适当的谱方法所求得的近似解将以 N^{-1} 的任意幂次速度收敛于精确解，这里 N 为所选取的基函数阶数. 这一优点是有限差分法和有限元法无法比拟的. 然而在实际应用中也出现了一些困难，特别是谱方法在处理守恒律方程等双曲线型问题时面临的稳定性问题. 因为双曲线方程的解通常会出现间断 (即使初始条件可能无限光滑)，当断点出现时，谱逼近会产生所谓的 Gibbs 想象，导致无法得到稳定解或解不唯一. 由于 Gibbs 震荡会随时间和空间传播，最终导致计算失败. 为了克服这种困难，人们提出很多改进的方法，其中包括超粘性方法、过滤法和谱粘性消去法 (SVV) 等. SVV 方法的主要思想是通过引入一个人工粘性项 (通常是高阶项) 来控制数值解的不稳定性，并使数值解保持谱精度. 最早提出该方法是 E.Tadmor [5]，他用 Fourier 谱粘性消去法计算非线性守恒律方程. 接着非周期的 Legendre 多项式逼近方法相继被提出 [6, 7, 8, 9, 10]. 近来，SVV 方法也被用来计算不可压高雷诺数 (Reynolds number) 流 [11]，并也被用于湍流大涡模拟 [12, 13] 中.

实际上，上述方法都是在有界的单区域上考虑. 而随着谱方法的发展，人们已不再满足于解决简单区域上的高精度逼近问题. 于是用于处理复杂区域又具备谱收敛特征的谱元法应运而生. Patera [14] 从变分原理出发提出了集谱方法的高精度和 $h-$ 型有限元法的灵活性于一体的谱元法. 该方法的灵活性及高效性在计算流体力学中得到了很好的体现 [15, 16]. 谱元法的发展，极大地拓展了谱方法的应用领域. 现在，谱 (元) 方法已经被广泛应用于气象、物理、力学等领域中，成为继有限差分法和有限元法后又一重要的数值方法，有关谱 (元) 方法的最新进展可以见综合文献 [17].

本文主要讨论多区域情形下基于谱元法的 SVV 技巧求解无界区域上的守恒律问题. 具体地说，我们考虑下面的问题：

$$\partial_t v(y,t) + \partial_y f(v(y,t)) = 0, \quad (y,t) \in (0,\infty) \times (0,T].$$

对于无界区域问题，通常有下面三种处理方法：

1° 截断方法，也就是用 $[0,L]$ 来代替 $[0,\infty)$，其中 L 是一个足够大的数；

2° 用 Laguerre 多项式或 Laguerre 函数进行逼近；

3° 先用映射把无界区域变换成有界区域，再对变换后的有界区域上的问题用 Legendre 多项式逼近.

这里，我们选择用第三种方法：把无界区域通过映射转化到有界区域，使得我们能够应用经典的 SVV 方法.

我们的工作有三个方面：首先，在映射后，我们得到有界区域上的一个新的守恒律方程，该方程体现出一些形式上的变化，我们的目标之一在于证明该变化对 SVV 方法的应用没有本质上的影响. 其次，为使所求的数值解更加有效，我们对区域进行剖分后应用区域分解方法，即所谓的 C^0 连续的谱元法. 这里，难点之一在于需要重新定义谱元情形下的 SVV 算子，在此基础上我们给出了详细的收

敛证明及数值结果. 显然由于应用了区域剖分，相对单区域来说，最后得到的线性系统条件数较小，求解较简单.

本文主要由下面几部分组成：第二部分我们简单介绍守恒律方程谱粘性消去法，并给出区域分解方法的详细介绍. 然后定义谱元逼近，将谱粘性消去法推广到多区域情形中. 第三部分进行收敛分析：在数值解一致有界性假设条件下，我们证明了数值解收敛到唯一的熵解. 第四部分通过对流方程和 Bürgers 方程的算例测试，对谱元粘性消去法的有效性进行了数值验证.

第二节 谱元粘性消去法

本节我们就无界区域上的守恒律方程构造谱元粘性消去法. 考虑下面的守恒律问题:

$$\partial_t v(y,t) + \partial_y f(v(y,t)) = 0, \quad \forall (y,t) \in (0,\infty) \times (0,T], \tag{2.1}$$

赋予边界条件:

$$v(0,t) = g(t) \quad \forall t \in (0,T],$$

和初始条件:

$$v(y,0) = v_0(y), \quad \forall y \in (0,\infty).$$

§2.1 谱粘性消去法

设 $\Lambda = (-1,1), \Omega = \Lambda \times (0,T]$. 通过下列映射:

$$y = -\ln \frac{1-x}{2} : x \in \Lambda \to y \in (0,\infty), \tag{2.2}$$

方程 (2.1) 被转化为一个定义在标准区间上的问题:

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + (1-x)\partial_x f(u(x,t)) = 0, & \forall (x,t) \in \Omega, \\ u(-1,t) = g(t), & \forall t \in (0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in \Lambda, \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $u(x,t) = v(y(x),t)$, $u_0 = v_0(y(x))$. 一般来说, 问题 (2.3) 的解不唯一. 为了定义 (2.3) 的唯一弱解 (即具有物理意义的解), 需要附加以下的熵条件: 对于任意的凸熵对 (U,F), $U''(\cdot) \geq 0$ 且 $F'(\cdot) = U'f'(\cdot)$, 有

$$\partial_t U(u(x,t)) + (1-x)\partial_x F(u(x,t)) \leq 0 \ , \quad \forall (x,t) \in \Omega. \tag{2.4}$$

可以证明, 满足熵条件 (2.4) 的问题 (2.3) 的弱解是唯一的. 事实上, 熵解可以通过粘性消去法来实现, 即 $u = \lim_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon$, 这里 u^ε 是下面粘性问题的解:

$$\partial_t u^\varepsilon(x,t) + (1-x)\partial_x f(u^\varepsilon(x,t)) = \varepsilon \partial_x (Q \partial_x u^\varepsilon(x,t)) \ , \quad \varepsilon > 0,$$

这里 Q 是一个 SVV 算子, 将在晚些时候定义. 上述粘性问题的弱形式定义为: 对于任意的检验函数 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega [u^\varepsilon(x,t)\partial_t \phi(x,t) + f(u^\varepsilon(x,t))\partial_x((1-x)\phi(x,t)) + \varepsilon Q \partial_x u^\varepsilon(x,t)\partial_x \phi(x,t)]dxdt = 0. \tag{2.5}$$

相比有界区域守恒律问题, 新问题 (2.5) 在对流项前面多了一个因子 $1-x$, 但是利用标准的方法 [6] 可以证明满足熵条件的弱解是唯一的.

§2.2 非重叠区域剖分方法

设 $L^2(\Lambda)$ 和 $L^2(\Omega)$ 为分别定义在 Λ 和 Ω 上的 Lebesgue 平方可积函数空间, 它们的内积分别为:

$$(\phi,\psi) = \int_\Lambda \phi\psi \ dx, \quad (\phi,\psi)_\Omega = \int_0^T (\phi,\psi) \ dt.$$

相应的范数为:

$$\|\phi\| = \sqrt{(\phi,\phi)}, \quad \|\phi\|_\Omega = \sqrt{(\phi,\phi)_\Omega}.$$

又设

$$H^1(\Lambda) := \{\phi \in L^2(\Lambda) : \ \partial_x \phi \in L^2(\Lambda)\},$$

$$H_0^1(\Lambda) := \{\phi \in H^1(\Lambda) : \phi(-1) = \phi(1) = 0\}.$$

考虑到谱元逼近需要用到数值积分, 我们简单回顾 Gauss 型求积公式: 设 $\{\xi_j\}_{j=0}^N$ 是 Legendre-Gauss-Lobatto 点, 即是方程 $(1-x^2)L_N'(x) = 0$ 的 $N+1$ 个零

点，这里 L_N 是 N 阶 Legendre 多项式，那么存在正的权系数， $\rho_0, \cdots, \rho_N$, 使得

$$\int_{-1}^{1} \phi(x)dx = \sum_{j=0}^{N} \rho_j \phi(\xi_j), \quad \forall \phi \in I\!P_{2N-1}(\Lambda), \tag{2.6}$$

这里 $I\!P_N(\Lambda)$ 是定义在 Λ 上的阶数不超过 N 的多项式空间. 设 $C(\Lambda)$ 表示所有定义在 Λ 上的连续函数空间. 根据 Gauss 求积公式，我们定义离散内积： $\forall \phi, \varphi \in C(\Omega)$,

$$(\phi, \varphi)_N = \sum_{j=0}^{N} \rho_j \phi(\xi_j)\psi(\xi_j), \quad (\phi, \varphi)_{\Omega,N} = \int_0^T (\phi, \psi)_N \, dt.$$

考虑非重叠区域剖分：

$$\bar{\Lambda} = \bigcup_{k=1}^{K} \bar{\Lambda}_k, \quad \Lambda_k \cap \Lambda_l = \emptyset, \forall k, \; l, \; k \neq l,$$

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{K} \bar{\Omega}_k, \qquad \Omega_k = \Lambda_k \times [0, T],$$

这里 $\Lambda_k = (a_k, a_{k+1})$, $-1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_{K+1} = +1$. 定义分片 N 阶多项式空间如下：

$$I\!P_{N,K}(\Lambda) := \{\phi \in L^2(\Lambda) : \quad \phi|_{\Lambda_k} \in I\!P_N(\Lambda_k), 1 \leq k \leq K\}.$$

为了把区域分解和谱方法结合，我们引入映射：

$$\Lambda_k \xrightarrow{F^k} \Lambda \,,$$

这里 F^k 定义为：

$$r = F^k(x) = 2\frac{x - a_k}{a_{k+1} - a_k} - 1.$$

由于上面的映射我们可以得到每块区域上的 Gauss-Lobatto 点 ξ_j^k 以及相应的权系数 ρ_j^k, 它们被定义如下：

$$\xi_j^k = a_k + (\xi_j + 1)h^k/2, \quad \rho_j^k = \rho_j h^k/2, \quad 0 \leq j \leq N, \quad 1 \leq k \leq K, \tag{2.7}$$

其中 h^k 是区间 Λ_k 的长度， i.e., $h^k = a_{k+1} - a_k$.

现在我们定义分片连续函数 ϕ 和 ψ 的离散内积：

$$(\phi, \psi)_{\mathcal{N}} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=0}^{N} \phi(\xi_j^k)\psi(\xi_j^k)\rho_j^k,$$

并用 $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$ 表示相应的离散范数，这里 $\mathcal{N}$ 表示一对正整数 (K, N). 众所周知 $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$ 和 $\|\cdot\|$ 是等价的 (参考 [18]), i.e.,

$$\|\phi\| \lesssim \|\phi\|_{\mathcal{N}} \lesssim \|\phi\|, \quad \forall \phi \in I\!P_{N,K}(\Lambda), \tag{2.8}$$

这里记号 $A \lesssim B$ 表示为：存在与 N 无关的常数 c, 使得 $A \leq cB$.

同样，由 Gauss 求积公式，我们可以得到：

$$(\phi, \psi) = (\phi, \psi)_{\mathcal{N}}, \quad \forall \phi\psi \in I\!P_{2N-1,K}(\Lambda). \tag{2.9}$$

§2.3 谱元粘性消去法 (SEVV)

现考虑 (2.5) 的离散问题： $\forall t \in (0, T]$, 存在 $u_{\mathcal{N}}(t) \in V_{\mathcal{N}}$, 使得 $u_{\mathcal{N}}(0) = I_{\mathcal{N}} u_0$, 且满足

$$\begin{aligned}
&(\frac{\partial}{\partial t}u_{\mathcal{N}} + (1-x)\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{I}_{\mathcal{N}} f(u_{\mathcal{N}}), \phi)_{\mathcal{N}} \\
&= -\varepsilon_N(\mathcal{Q}\frac{\partial}{\partial x}u_{\mathcal{N}}, \frac{\partial}{\partial x}\phi)_{\mathcal{N}} + (B(u_{\mathcal{N}}), \phi)_{\mathcal{N}}, \quad \forall \phi \in V_{\mathcal{N}},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

这里 $V_{\mathcal{N}} = H^1(\Lambda) \cap I\!P_{N,K}(\Lambda)$, $\mathcal{I}_{\mathcal{N}}$ 是插值算子， ε_N 是粘性振幅，满足

$$\varepsilon_N = O(1/N^{\alpha}),\ 0 < \alpha < 1. \tag{2.11}$$

根据文献 [19] 中的处理方法， (2.10) 中的边界算子 $B(u_{\mathcal{N}})$ 被定义为分片多项式： $\forall t \in [0, T]$

$$B(u_{\mathcal{N}})|_{\Lambda_1} = 2\mu(t)\frac{a_2 - x}{a_2 + 1}L'_N(r) \circ F^k(x),$$

$$B(u_{\mathcal{N}})|_{\Lambda_k} = 0,\ 2 \le k \le K,$$

其中 $\mu(t)$ 是关于时间 t 的函数. 其次，我们定义谱元粘性算子 $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{Q}\phi|_{\Lambda_k} = \mathcal{Q}^k\phi^k,\quad 1 \le k \le K,\ \forall\phi \in V_{\mathcal{N}}, \tag{2.12}$$

其中，记 $\phi^k := \phi|_{\Lambda_k}$. $\mathcal{Q}^k$ 是每一个子区间上定义的局部谱粘性算子:

$$\mathcal{Q}^k\phi^k := (\tilde{Q}\tilde{\phi^k}) \circ F^k, \tag{2.13}$$

这里

$$\tilde{\phi^k} := \phi^k \circ (F^k)^{-1}.$$

$\tilde{Q}$ 是定义在标准区域 $(-1, 1)$ 上谱粘性算子，具有如下表达式:

$$\tilde{Q}\tilde{\phi}(r) := \sum_{i=0}^{N} \hat{Q}_i\hat{\phi}_i L_i(r),\quad \forall\tilde{\phi},\quad \tilde{\phi}(r) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\phi}_i L_i(r). \tag{2.14}$$

这里 L_i 是阶数为 i 的 Legendre 多项式， $\hat{Q}_i$ 为 $\tilde{Q}$ 的谱系数，满足:

$$\begin{cases} \hat{Q}_i = 0, & 0 \le i \le m_N, \\ 0 \le \hat{Q}_i \le 1, & m_N < i \le N. \end{cases}$$

显然，参数 m_N 决定了 $\tilde{Q}$ 的作用频段. 在实际计算中，一般取 $m_N = O(\sqrt{N})$ 或是取 $m_N = N/2$ [12]. 而针对 Bürgers 方程，Maday 等人 [9] 取 $m_N < O(N^{1/4})$，且 $\hat{Q}_i$ 满足

$$1 \ge \hat{Q}_i \ge 1 - (\frac{m_N}{i})^4,\quad m_N < i \le N. \tag{2.15}$$

由于 (2.14), (2.13) 能够被重写为:

$$\mathcal{Q}^k\phi^k = [\sum_{i=0}^{N} \hat{Q}_i\hat{\phi}_i^k L_i(r)] \circ F^k(x) = \sum_{i=0}^{N} \hat{Q}_i\hat{\phi}_i^k L_i^k(x), \tag{2.16}$$

这里

$$L_i^k(x) := L_i(r) \circ F^k(x).$$

在 (2.10) 中，取 $\phi=\phi_i$ 为分片 Lagrangian 基函数，则在内部节点上我们有：

$$
\begin{aligned}
&\partial_t u_N^k(\xi_j^k,t)+(1-\xi_j^k)\partial_x \mathcal{I}_N f(u_N^k)(\xi_j^k,t)\\
&=\varepsilon_N \partial_x Q(\partial_x u_N^k)(\xi_j^k,t),\ 1\le j\le N-1, 1\le k\le K.
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

而在交面上有

$$
\begin{aligned}
&\rho_0^{k+1}h^{k+1}[\partial_t u_N^{k+1}(\xi_0^{k+1},t)+(1-\xi_0^{k+1})\partial_x \mathcal{I}_N f(u_N^{k+1})(\xi_0^{k+1},t)\\
&+\varepsilon_N \partial_x Q(\partial_x u_N^{k+1})(\xi_0^{k+1},t)]/2+\rho_N^k h^k[\partial_t u_N^k(\xi_N^k,t)\\
&+(1-\xi_N^k)\partial_x \mathcal{I}_N f(u_N^k)(\xi_N^k,t)+\varepsilon_N \partial_x Q(\partial_x u_N^k)(\xi_N^k,t)]/2\\
&=\varepsilon_N((Q\partial_x u_N^{k+1})(\xi_0^{k+1},t)-(Q\partial_x u_N^k)(\xi_N^k,t)),\quad 1\le k\le K-1.
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

在入口边界上，成立

$$
\begin{aligned}
&\partial_t u_N^1(-1,t)+2\partial_x \mathcal{I}_N f(u_N^1)(-1,t)\\
&=\varepsilon_N \partial_x Q(\partial_x u_N^1)(-1,t)+\frac{\varepsilon_N}{\rho_0^1}Q(\partial_x u_N^1)(-1,t)-\frac{2(-1)^N\mu(t)}{\rho_0^1}.
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

在 (2.19) 式中左边最后一项我们可以参考 [19] 的方法选择 $\mu(t)$. (2.17)-(2.19) 构成了与问题 (2.10) 等价的配点形式.